

Title	距離付ケラレタ環ニ於テ閉ヂタ連續群, IV.
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 77 p.4-p.9
Issue Date	1936-02-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74260
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

337. 距離付ケラレタ環ニ於テ開デタ連続群, IV.

吉田耕作 (阪大)

I. 前論 298. = 於テ *metrical complete ring* R
= 於テ開デタ連続群 \mathcal{O}_f が i) *of finite dimension*
ii) *locally compact* iii) *zusammenhängend*
ナラバ \mathcal{O}_f ハ *Lie* 群デアール, ヲ証明シマシタガ

假定 i) ハ假定 ii) カラ出ル様デス。ソレニハ論文 333 =
南雲氏ノ紹介サレタ F. Riesz ノ定理 (*linear metrical space* ノ有界ナ部分ガ *compact* ナラバ, コ
ノ *space* ハ実ハ有限次元デアール) ヲ用ヒレバヨロシイ。

即チ

$B = \log A$, $A \in \mathcal{O}_f$, $|A - E| \leq \frac{1}{2}$ ナル如キ B ノ全体ヲ
 \mathcal{L} トスレバ \mathcal{L} ハ假定 ii) = ヨリ *compact*. 然ルニ 68 号
5 頁定理 4 カラ \mathcal{O}_f ノ E = 於ケル differential quotient
ノ全体ナル *linear metrical space* \mathcal{J} ノ中 0 = 近
イモノハ \mathcal{L} ニ含まレルカラ。

II. 次ニ *Lie* ノ第二基本定理ニ相當スル次ノ結果ガ
云ヘル様デス。

定理 R , (*real number* ヲ係数トシテ) k コ
ノ一次独立ナ U_1, U_2, \dots, U_k ガ, ソノ *commutator-*
produkt $U_i \times U_j = U_i U_j - U_j U_i$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$)
ガ *real number* ヲ係数トシテ U_1, U_2, \dots, U_k ノ一次

結合トナル, ∇ 満足スルナラバ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^k a_i U_i\right), \quad a \text{ real } \sum_{i=1}^k |a_i| < \varepsilon,$$

ハ充分小サナ $\varepsilon =$ 對シ Lie , $Gruppenkeim$ ∇ 作
ル。

[注意] 以下ノ証明ハ其ノマヽ古典的ナ Lie ノ理論ニ
 $apply$ 出来マスシ, ∇ canonical parameter, 合成
規則

$$C_i = \mathcal{P}_i(a, b);$$

$$\exp\left(\sum_{i=1}^k C_i U_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^r a_i U_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^r b_i U_i\right)$$

∇ 求メル方法 ∇ 興ヘルト云フ意味 ∇ *uninteressant*? ∇
ハナイト思ヒマス。証明ハニツ, $Lemma$ ∇ 要シマ
ス。

$Lemma 1.$ $\cdot R =$ einbetten ∇ ∇ one para-
meter continuous function $A(t)$, $-a < t < a$
ガ $|A(t) - E| < 1$ 及ビ連続微分可能 (即チ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$
存在シ連続) ナラバ $\log A(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(A(t) - E)^{\nu}}{\nu}$ ニ亦微
分可能ニシテ且ツ

$$\frac{d \ln A(t)}{dt} = \frac{d A(t)}{dt} A(t)^{-1} \quad \left(A(t)^{-1} = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} (E - A(t))^{\nu} \right)$$

証明. $\frac{d(A(t)-E)^{\nu}}{dt} = \nu \frac{dA(t)}{dt} (A(t)-E)^{\nu-1}$ ハスグ証セ

ルカラ 項別微分可能ナラバ

$$\frac{d \ln A(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} (A(t)-E)^{\nu-1} = \frac{dA(t)}{dt} A(t)^{-1}$$

項別微分可能ナコトハ普通ノ *analysis* ト同様ニシテ証セル。

Lemma 2. $Z(t) = \exp.(tU) \exp.(tV)$ トスレバ

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (U + e^{tU} V e^{-tU}) Z(t)$$

証明. $\frac{d \exp.(tU)}{dt} = U \exp.(tU) = \exp.(tU) U$

(前論 280, p. 5 参照) ガカラ $\frac{dZ(t)}{dt} = U \exp.(tU) \exp.(tV) + \exp.(tU) V \exp.(tV)$ ヲ得ルカラ。

特ニ t ガ充分小サケレバ $(|t| \leq a)$ 中 $|Z(t) - E| < 1$ ガカラ上ノ Lemma 1 カラ

$$(1) \quad \frac{d \ln Z(t)}{dt} = (U + e^{tU} V e^{-tU}).$$

定理ノ証明. $U, V, U \times V$ ガ全テ U_1, U_2, \dots, U_k ノ一次結合ナラバ充分 t ノ小サイトキ (1) ノ解 $\ln Z(t)$; $\ln Z(0) = 0$; ガマハリ U_1, U_2, \dots, U_k ノ一次結合トナレバヨイ。其ノヌメニ

(1) t の ∇ 級数トシテ解イテミル。 (t が充分小サイトキコノ ∇ 級数ノ収斂及ビコノ解ノ uniqueness ハ容易ニナル。

$$\begin{aligned} \ln Z(0) &= 0, \quad (\ln Z(t))'_0 = U + \nabla, \\ (\ln Z(t))'' &= e^{tU} U \nabla e^{-tU} - e^{tU} \nabla U e^{-tU} \\ &= e^{tU} (U \times \nabla) e^{-tU} \end{aligned}$$

カラ $(\ln Z(t))'' = U \times \nabla$ 。 同ジク $(\ln Z(t))''' = U \times (U \times \nabla)$ 。

假定ニヨリ U_1, \dots, U_k ヲ base トスル linear space \mathcal{U} ノ element $= U$ ヲ 掛ケル (\times ノ意味デ) コトハ \mathcal{U} ノ U ヲ ∇ 一次寫像 T_U ヲ意味スル。 然ラベ一般ニ

$$\begin{aligned} (\ln Z(t))''_0 &= T_U \nabla, \quad (\ln Z(t))'''_0 = T_U^2 \nabla, \dots \\ \dots, (\ln Z(t))^{(n)}_0 &= T_U^{n-1} \nabla. \end{aligned}$$

依ツテ

$$\ln Z(t) = t(U + \nabla) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n T_U^{n-1} \nabla}{n!}$$

ヨツテ $\ln Z(t)$ ハ t が充分小サイトキ U_1, \dots, U_k ノ一次結合トナル。

[注意] 上ノ如クシテ得ラレタ Gruppenkeim カラ erzeugen セレタ group ($R = \text{einbetten}$ スル) ノ $E =$ 於ケル differential quotient ハ必ズシモ U_1, U_2, \dots, U_k ノ一次結合トハ限ラナイ (コレヲ含ムケレドモ)。 Neumann ガ 古典的ニ Lie ノ理論 = 相當ス

ル Matrix ノ 場合 = ツ, example ヲ示シテアル
(M. Z. 1929)

III. $R = einbetten$ シタ群ヲ考ヘテル間 = 氣が付
イタノデスガ Lie ノ 第一基本定理ノ essential ナ意味。
一般 = 解析函数 = ヨツテ定義サレタ 変換, 変換群 Of ノ ele-
ment g ヲ 変換ヲ作用サセル空間, 点 P ノ 任意ノ Analytic
function $f(P)$ = 作用サセルモノトシテ $f(P) \rightarrow g.f(P)$
ハ Linear ナ Operator デアルが特 = Lie 変換群,
トキハ Of ノ element ノ 中デ 充分 單位 変換 = 近イモノ
ハ, 特 = infinitesimal operator U_i = ヨリ

$\exp. \left(\sum_{i=1}^r a_i U_i \right)$ ナル 特別ナ形ノ linear operator

デアルト云フコト = アルノデハナイデセウカ。ソウスレバ
Schreier ノ 第一基本定理 ヲ使フコト = ヨリ 連結セル Lie
変換群 ノ 任意ノ element ハ之レヲ上ノ如キ $f(P)$ = 作用
サセルモノトミレバ上ノ如キ $\exp.$ - Operator 有限コノ
積ト表ハサレル linear operator = ナル。ヨツテ $f(P)$
= 作用サセルモノトシテ Of ヲ metrical complete
ring = einbetten シタ differentiable group
ノ如ク取扱ヘル。カカラコノ点ヲ explicite = 意識サ
ヘスレバ II = 述べタ canonical parameter, 合
成 (或ハ 第二基本定理ノ逆), adjoint 群ノ話, nor-
malteiler ノ 議論等全テ matrix 運算 (或ハ $R = ein-$

betten シタ Lie 群ノ運算) ト同様ナ Operator calculus = ヨツヲ見通シヨク議論デキルワケデス。古典的ナ Bianchi, Vivanti 等ノ書物或ハ筆者ノ愚著連続群論モコノ重大ナ点ヲ explicite = ハ意識シテヲリマセソ。